

## 4.1

a) Jonon erotusluku saadaan laskemalla peräkkäisten jäsenten erotus.

$$d = 5 - 2 = 3 \qquad d = a_2 - a_1$$

b) Muodostetaan jono yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned} a_n &= 2 + (n - 1) \cdot 3 & a_n &= a_1 + (n - 1) \cdot d \\ &= 2 + 3n - 3 \\ &= 3n - 1 \end{aligned}$$

Lasketaan jonon 20. jäsen.

$$\begin{aligned} a_{20} &= 3 \cdot 20 - 1 & a_n &= 3n - 1 \\ &= 59 \end{aligned}$$

c) **Tapa 1.** Yhtälön avulla.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan  $n$ .

$$\begin{aligned} a_n &= 100 & \text{Sijoitetaan } a_n &= 3n - 1. \\ 3n - 1 &= 100 & \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\ n &= 33,666... \end{aligned}$$

Koska jonon seuraava jäsen saadaan aina edellisestä lisäämällä luku 3, jonon jäsenet kasvavat koko ajan. Jonon viimeinen alle 100 oleva jäsen on  $a_{33}$ .

Jonon 33 ensimmäistä jäsentä ovat pienempiä kuin 100.

**Tapa 2.** Epäyhtälön avulla.

Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan  $n$ .

$$a_n < 100$$

$$\text{Sijoitetaan } a_n = 3n - 1.$$

$$3n - 1 < 100$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$n < 33,666\dots$$

Suurin positiivinen kokonaisluku  $n$ , joka toteuttaa epäyhtälön, on 33.  
Jonon viimeinen alle 100 oleva jäsen on  $a_{33}$ .

Jonon 33 ensimmäistä jäsentä ovat pienempiä kuin 100.

### Vastaus

a)  $d = 3$

b)  $a_n = 3n - 1$ ,  $a_{20} = 59$

c) 33 ensimmäistä jäsentä

## 4.2

- a) Jonon erotusluku saadaan laskemalla peräkkäisten jäsenten erotus.

$$d = -81 - (-87) = 6$$

$$d = a_2 - a_1$$

Muodostetaan jono yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned} a_n &= -87 + (n-1) \cdot 6 \\ &= -87 + 6n - 6 \\ &= 6n - 93 \end{aligned}$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

- b) Lasketaan jonon 63. jäsen.

$$\begin{aligned} a_{63} &= 6 \cdot 63 - 93 \\ &= 285 \end{aligned}$$

$$a_n = 6n - 93$$

- c) Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan  $n$ .

$$\begin{aligned} a_n &= 63 \\ 6n - 93 &= 63 \\ n &= 26 \end{aligned}$$

$$\text{Sijoitetaan } a_n = 6n - 93.$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

Luku 63 on jonon 26. jäsen.

### Vastaus

a)  $a_n = 6n - 93$

b)  $a_{63} = 285$

c) 26. jäsen

## 4.3

- a) Aritmeettisen summan  $a_1 + a_2 + \dots + a_{100}$   
ensimmäinen yhteenlaskettava on  $a_1 = 4 \cdot 1 + 8 = 12$ ,  
viimeinen yhteenlaskettava on  $a_{100} = 4 \cdot 100 + 8 = 408$  ja  
yhteenlaskettavien lukumäärä on  $n = 100$ .

Lasketaan summan arvo.

$$\begin{aligned} S_{100} &= 100 \cdot \frac{12 + 408}{2} & S_n &= n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \\ &= 21\,000 \end{aligned}$$

- b) Aritmeettisen summan  $a_8 + a_9 + \dots + a_{75}$   
ensimmäinen yhteenlaskettava on  $a_8 = 4 \cdot 8 + 8 = 40$ ,  
viimeinen yhteenlaskettava on  $a_{75} = 4 \cdot 75 + 8 = 308$  ja  
yhteenlaskettavien lukumäärä on  $n = 75 - 8 + 1 = 68$ .  
(Summasta jää pois jonon seitsemän ensimmäistä jäsentä.)

Lasketaan summan arvo.

$$\begin{aligned} S_{68} &= 68 \cdot \frac{40 + 308}{2} & S_n &= n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \\ &= 11\,832 \end{aligned}$$

### Vastaus

- a) 21 000  
b) 11 832

## 4.4

- a) Aritmeettisen summan  $\sum_{n=1}^{25} (a_n)$

ensimmäinen yhteenlaskettava on  $a_1 = 7 \cdot 1 - 132 = -125$ ,  
viimeinen yhteenlaskettava on  $a_{25} = 7 \cdot 25 - 132 = 43$  ja  
yhteenlaskettavien lukumäärä on  $n = 25$ .

Lasketaan summan arvo.

$$\begin{aligned} S_{25} &= 25 \cdot \frac{-125 + 43}{2} & S_n &= n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \\ &= -1025 \end{aligned}$$

- b) Aritmeettisen summan  $\sum_{n=12}^{105} (a_n)$

ensimmäinen yhteenlaskettava on  $a_{12} = 7 \cdot 12 - 132 = -48$ ,  
viimeinen yhteenlaskettava on  $a_{105} = 7 \cdot 105 - 132 = 603$  ja  
yhteenlaskettavien lukumäärä on  $n = 105 - 11 = 94$ .  
(Summasta jää pois jonon yksitoista ensimmäistä jäsentä.)

Lasketaan summan arvo.

$$\begin{aligned} S_{94} &= 94 \cdot \frac{-48 + 603}{2} & S_n &= n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \\ &= 26\,085 \end{aligned}$$

### Vastaus

a)  $-1025$

b)  $26\,085$

## 4.5

Ensimmäinen yhteenlaskettava on 17 ja viimeinen yhteenlaskettava 477.

Selvitetään yhteenlaskettavien lukumäärä aritmeettisen jonon 17, 22, ..., 477 yleisen jäsenen lausekkeen avulla.

Ensimmäinen jäsen  $a_1 = 17$  ja erotusluku  $d = 22 - 17 = 5$ . Muodostetaan yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned}a_n &= 17 + (n - 1) \cdot 5 & a_n &= a_1 + (n - 1) \cdot d \\&= 17 + 5n - 5 \\&= 5n + 12\end{aligned}$$

Ratkaistaan, kuinka mones jonon jäsen on luku 477.

$$\begin{aligned}a_n &= 477 & \text{Sijoitetaan } a_n &= 5n + 12. \\5n + 12 &= 477 & | -12 \\5n &= 465 & | : 5 \\n &= 93\end{aligned}$$

Luku 477 on jonon 93. jäsen, joten yhteenlaskettavien lukumäärä on 93.

Lasketaan aritmeettisen summan arvo.

$$S_{93} = 93 \cdot \frac{17 + 477}{2} = 22\,971 \quad S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

**Vastaus**

22 971

## 4.6

Ensimmäinen yhteenlaskettava on 17,5 ja viimeinen yhteenlaskettava -68.

Selvitetään yhteenlaskettavien lukumäärä aritmeettisen jonon 17,5, 16, ..., -68 yleisen jäsenen lausekkeen avulla.

Ensimmäinen jäsen  $a_1 = 17,5$  ja erotusluku  $d = 16 - 17,5 = -1,5$ . Muodostetaan yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned}a_n &= 17,5 + (n-1) \cdot (-1,5) & a_n &= a_1 + (n-1) \cdot d \\&= 17,5 - 1,5n + 1,5 \\&= 19 - 1,5n\end{aligned}$$

Ratkaistaan, kuinka mones jonon jäsen on luku -68.

$$\begin{array}{ll}a_n = -68 & \text{Sijoitetaan } a_n = 19 - 1,5n. \\19 - 1,5n = -68 & | -19 \\-1,5n = -87 & | : (-1,5) \\n = 58 & \end{array}$$

Luku -68 on jonon 58. jäsen, joten yhteenlaskettavien lukumäärä on 58.

Lasketaan aritmeettisen summan arvo.

$$S_{58} = 58 \cdot \frac{17,5 - 68}{2} = -1464,5 \qquad S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

**Vastaus**

-1464,5

## 4.7

Lukujono on aritmeettinen, jos peräkkäisten jäsenten erotus  $a_{n+1} - a_n$  on vakio kaikilla  $n = 1, 2, 3, \dots$ .

Muodostetaan peräkkäisten jäsenten lausekkeet.

$$a_n = 9n + 12$$

$$a_{n+1} = 9(n+1) + 12 = 9n + 9 + 12 = 9n + 21$$

Lasketaan peräkkäisten jäsenten erotus.

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (9n + 21) - (9n + 12) \\ &= 9n + 21 - 9n - 12 \\ &= 9 \end{aligned}$$

Koska  $a_{n+1} - a_n = 9$  kaikilla  $n = 1, 2, 3, \dots$ , lukujono  $(a_n)$  on aritmeettinen.  $\square$



## 4.8

Lukujono on aritmeettinen, jos peräkkäisten jäsenten erotus on vakio.

a) Lasketaan peräkkäisten jäsenten erotuksia.

$$a_2 - a_1 = 6 - 3 = 3$$

$$a_3 - a_2 = 9 - 6 = 3$$

$$a_4 - a_3 = 12 - 9 = 3$$

Koska peräkkäisten jäsenten erotus on vakio, lukujono voi olla aritmeettinen.

Huomaa, että lukujono ei välttämättä ole aritmeettinen, koska emme tiedä miten lukujono jatkuu. Lukujono alussa peräkkäisten jäsenten erotus on vakio, joten lukujono voi olla aritmeettinen.

b) Lasketaan peräkkäisten jäsenten erotuksia.

$$a_2 - a_1 = 0 - 5 = -5$$

$$a_3 - a_2 = -5 - 0 = -5$$

$$a_4 - a_3 = -10 - (-5) = -5$$

Koska peräkkäisten jäsenten erotus on vakio, lukujono voi olla aritmeettinen.

c) Lasketaan peräkkäisten jäsenten erotuksia.

$$a_2 - a_1 = 5 - 2 = 3$$

$$a_3 - a_2 = 8 - 5 = 3$$

$$a_4 - a_3 = 12 - 8 = 4$$

Koska peräkkäisten jäsenten erotus ei ole vakio, lukujono ei voi olla aritmeettinen.

d) Lasketaan peräkkäisten jäsenten erotuksia.

$$a_2 - a_1 = 10 - 5 = 5$$

$$a_3 - a_2 = 20 - 10 = 10$$

$$a_4 - a_3 = 40 - 20 = 20$$

Koska peräkkäisten jäsenten erotus ei ole vakio, lukujono ei voi olla aritmeettinen.

e) Lasketaan peräkkäisten jäsenten erotuksia.

$$a_2 - a_1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$a_3 - a_2 = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_4 - a_3 = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$$

Koska peräkkäisten jäsenten erotus on vakio, lukujono voi olla aritmeettinen.

f) Lasketaan peräkkäisten jäsenten erotuksia.

$$a_2 - a_1 = 6 - 12 = -6$$

$$a_3 - a_2 = 12 - 6 = 6$$

Koska peräkkäisten jäsenten erotus ei ole vakio, lukujono ei voi olla aritmeettinen.

**Vastaus**

a, b ja e

## 4.9

- a) Jonon erotusluku saadaan laskemalla peräkkäisten jäsenten erotus.

$$d = 28 - 17 = 11$$

$$d = a_2 - a_1$$

Muodostetaan jono yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned} a_n &= 17 + (n - 1) \cdot 11 \\ &= 17 + 11n - 11 \\ &= 11n + 6 \end{aligned}$$

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

- b) Summan ensimmäinen yhteenlaskettava on  $a_1 = 17$ ,  
viimeinen yhteenlaskettava on  $a_{40} = 11 \cdot 40 + 6 = 446$  ja  
yhteenlaskettavien lukumäärä  $n = 40$ .

Lasketaan aritmeettisen summan arvo.

$$S_{40} = 40 \cdot \frac{17 + 446}{2} = 9260 \quad S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{n}$$

- c) Kun lasketaan yhteen jonon  $n$  ensimmäistä jäsentä,  
ensimmäinen yhteenlaskettava on  $a_1 = 17$  ja  
viimeinen yhteenlaskettava on  $a_n = 11n + 6$ .

Summan arvo on

$$S_n = n \cdot \frac{17 + (11n + 6)}{2} = n \cdot \frac{11n + 23}{2}.$$

### Tapa 1. Yhtälön avulla.

Summan tulee olla yli 15 000. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan, kuinka monta jäsentä on laskettava yhteen, jotta summa on 15 000.

$$S_n = 15000$$

$$n \cdot \frac{11n + 23}{2} = 15\,000 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$n = -53,27... \quad \text{tai} \quad n = 51,18...$$

Koska jonon kaikki jäsenet ovat positiivisia, summan arvo suurenee, kun yhteenlaskettavien jäsenten lukumäärä kasvaa.

Tulee laskea yhteen siis vähintään 52 jonon alkupään jäsentä, jotta summan arvo ylittää arvon 15 000.

### Tapa 2. Epäyhtälön avulla.

Summan tulee olla yli 15 000. Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan, kuinka monta jäsentä on laskettava yhteen, jotta summa ylittää 15 000.

$$S_n > 15000$$

$$n \cdot \frac{11n + 23}{2} > 15\,000 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$n < -53,27... \quad \text{tai} \quad n > 51,18...$$

Pienin positiivinen kokonaisluku  $n$ , joka toteuttaa epäyhtälön, on 52.

Tulee laskea yhteen siis vähintään 52 jonon alkupään jäsentä, jotta summan arvo ylittää arvon 15 000.

### Vastaus

a)  $a_n = 11n + 6$

b) 9260

c) vähintään 52

## 4.10

Liisan säästöpossuun sijoittamat rahamäärät muodostavat aritmeettisen jonon, jonka ensimmäinen jäsen  $a_1 = 3$  ja erotusluku  $d = 2$ .

Jonon yleisen jäsenen lauseke on

$$a_n = 3 + (n - 1) \cdot 2 = 3 + 2n - 2 = 2n + 1.$$

Muodostetaan lauseke jonon  $n$ :n ensimmäisen jäsenen summalle.

$$S_n = n \cdot \frac{3 + (2n + 1)}{2} = n \cdot \frac{2n + 4}{2}$$

**Tapa 1.** Yhtälön avulla.

Summan tulee olla yli 1000. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan, kuinka monta jäsentä on laskettava yhteen, jotta summa on 1000.

$$S_n = 1000$$

$$n \cdot \frac{2n + 4}{2} = 1000$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$n = -32,63... \text{ tai } n = 30,63...$$

Koska jonon kaikki jäsenet ovat positiivisia, summan arvo suurenee, kun yhteenlaskettavien jäsenten lukumäärä kasvaa.

Liisan tulee säästää siis 31 viikkoa.

**Tapa 2.** Epäyhtälön avulla.

Summan tulee olla yli 1000. Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan, kuinka monta jäsentä on laskettava yhteen, jotta summa ylittää 1000.

$$S_n > 1000$$
$$n \cdot \frac{2n+4}{2} > 1000 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$n < -32,63... \quad \text{tai} \quad n > 30,63...$$

Pienin positiivinen kokonaisluku  $n$ , joka toteuttaa epäyhtälön, on 31.

Liisan tulee säästää siis 31 viikkoa.

Lasketaan viikolla 31 possuun laitettavan rahamäärän suuruus.

$$a_{31} = 2 \cdot 31 + 1 = 63 \text{ (€)}$$

**Vastaus**

31 viikkoa, 63 €

## 4.11

a) Jonon erotusluku saadaan laskemalla peräkkäisten jäsenten erotus.

$$d = -221 - (-239) = 18$$

$$d = a_2 - a_1$$

b) Muodostetaan jono yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned} a_n &= -239 + (n-1) \cdot 18 \\ &= -239 + 18n - 18 \\ &= 18n - 257 \end{aligned}$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

Lasketaan jonon 100. jäsen.

$$\begin{aligned} a_{100} &= 18 \cdot 100 - 257 \\ &= 1543 \end{aligned}$$

$$a_n = 18n - 257$$

c) **Tapa 1.** Yhtälön avulla.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan  $n$ .

$$a_n = 0$$

$$\text{Sijoitetaan } a_n = 18n - 257.$$

$$18n - 257 = 0$$

$$\text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$n = 14,277\dots$$

Koska jonon seuraava jäsen saadaan aina edellisestä lisäämällä luku 18, jonon jäsenet kasvavat koko ajan. Jonon viimeinen negatiivinen jäsen on  $a_{14}$ .

Jonon 14 ensimmäistä jäsentä ovat negatiivisia.

**Tapa 2.** Epäyhtälön avulla.

Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan  $n$ .

$$a_n < 0 \quad \text{Sijoitetaan } a_n = 18n - 257.$$

$$18n - 257 < 0 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$n < 14,277\dots$$

Suurin positiivinen kokonaisluku  $n$ , joka toteuttaa epäyhtälön, on 14.  
Jonon viimeinen negatiivinen jäsen on  $a_{14}$ .

Jonon 14 ensimmäistä jäsentä ovat negatiivisia.

### **Vastaus**

**a)**  $d = 18$

**b)**  $a_n = 18n - 257, a_{100} = 1543$

**c)** 14 ensimmäistä jäsentä



## 4.12

- a) Aritmeettisen summan  $a_1 + a_2 + \dots + a_{70}$   
ensimmäinen yhteenlaskettava on  $a_1 = 256 - 6 \cdot 1 = 250$ ,  
viimeinen yhteenlaskettava on  $a_{70} = 256 - 6 \cdot 70 = -164$  ja  
yhteenlaskettavien lukumäärä on  $n = 70$ .

Lasketaan summan arvo.

$$S_{70} = 70 \cdot \frac{250 - 164}{2} \qquad S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$
$$= 3010$$

- b) Aritmeettisen summan  $\sum_{n=15}^{95} (a_n)$

ensimmäinen yhteenlaskettava on  $a_{15} = 256 - 6 \cdot 15 = 166$ ,  
viimeinen yhteenlaskettava on  $a_{95} = 256 - 6 \cdot 95 = -314$  ja  
yhteenlaskettavien lukumäärä on  $n = 95 - 14 = 81$ .  
(Summasta jää pois jonon neljätoista ensimmäistä jäsentä.)

Lasketaan summan arvo.

$$S_{81} = 81 \cdot \frac{166 - 314}{2} \qquad S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$
$$= -5994$$

### Vastaus

a) 3010

b) -5994

## 4.13

- a) Ensimmäinen yhteenlaskettava on 102 ja viimeinen yhteenlaskettava 1948.

Selvitetään yhteenlaskettavien lukumäärä aritmeettisen jonon 102, 115, ... , 1948 yleisen jäsenen lausekkeen avulla.

Ensimmäinen jäsen  $a_1 = 102$  ja erotusluku  $d = 115 - 102 = 13$ .  
Muodostetaan yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned}a_n &= 102 + (n-1) \cdot 13 & a_n &= a_1 + (n-1) \cdot d \\&= 102 + 13n - 13 \\&= 13n + 89\end{aligned}$$

Ratkaistaan, kuinka mones jonon jäsen on luku 1948.

$$\begin{array}{rcl}a_n &= & 1948 & \text{Sijoitetaan } a_n = 13n + 89. \\13n + 89 &= & 1948 & | -89 \\13n &= & 1859 & |:13 \\n &= & 143\end{array}$$

Luku 1948 on jonon 143. jäsen, joten yhteenlaskettavien lukumäärä on 143.

Lasketaan aritmeettisen summan arvo.

$$S_{143} = 143 \cdot \frac{102 + 1948}{2} = 146\,575 \qquad S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

- b) Ensimmäinen yhteenlaskettava on  $-900$  ja viimeinen yhteenlaskettava  $90$ .

Selvitetään yhteenlaskettavien lukumäärä aritmeettisen jonon  $-900 - 897 - \dots + 90$  yleisen jäsenen lausekkeen avulla.

Ensimmäinen jäsen  $a_1 = -900$  ja erotusluku  $d = -897 - (-900) = 3$ .  
Muodostetaan yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned} a_n &= -900 + (n-1) \cdot 3 & a_n &= a_1 + (n-1) \cdot d \\ &= -900 + 3n - 3 \\ &= 3n - 903 \end{aligned}$$

Ratkaistaan, kuinka mones jonon jäsen on luku  $90$ .

$$\begin{array}{ll} a_n = 90 & \text{Sijoitetaan } a_n = 3n - 903. \\ 3n - 903 = 90 & | +903 \\ 3n = 993 & | :3 \\ n = 331 & \end{array}$$

Luku  $90$  on jonon  $331$ . jäsen, joten yhteenlaskettavien lukumäärä on  $331$ .

Lasketaan aritmeettisen summan arvo.

$$S_{331} = 331 \cdot \frac{-900 + 90}{2} = -134\,055 \quad S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

### Vastaus

a)  $146\,575$

b)  $-134\,055$

## 4.14

Lukujono on aritmeettinen, jos peräkkäisten jäsenten erotus  $a_{n+1} - a_n$  on vakio kaikilla  $n = 1, 2, 3, \dots$ .

Muodostetaan peräkkäisten jäsenten lausekkeet.

$$a_n = 159 - 37n$$

$$a_{n+1} = 159 - 37(n+1) = 159 - 37n - 37 = 122 - 37n$$

Lasketaan peräkkäisten jäsenten erotus.

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (122 - 37n) - (159 - 37n) \\ &= 122 - 37n - 159 + 37n \\ &= -37 \end{aligned}$$

Koska  $a_{n+1} - a_n = -37$  kaikilla  $n = 1, 2, 3, \dots$ , lukujono  $(a_n)$  on aritmeettinen.  $\square$

## 4.15

Juliuksen säästämät rahamäärät muodostavat aritmeettisen jonon, jonka ensimmäinen jäsen  $a_1 = x$  ja erotusluku  $d = 1$ .

Jonon 22. jäsen on

$$a_{22} = x + 21 \cdot 1 = x + 21$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

Muodostetaan lauseke jonon 22 ensimmäisen jäsenen summalle.

$$S_{22} = 22 \cdot \frac{x + (x + 21)}{2} = 11 \cdot (2x + 21)$$

**Tapa 1.** Yhtälön avulla.

Summan tulee olla yli 1500. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan  $x$ .

$$S_{22} = 1500$$

$$11 \cdot (2x + 21) = 1500$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 57,68\dots$$

Juliuksen tulee aloittaa vähintään 58 eurolla.

**Tapa 2.** Epäyhtälön avulla.

Summan tulee olla yli 1500. Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan  $x$ .

$$S_{22} > 1500$$

$$11 \cdot (2x + 21) > 1500$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x > 57,68\dots$$

Juliuksen tulee aloittaa säästäminen vähintään 58 eurolla.

**Vastaus**

58 €

## 4.16

Aritmeettisen jonon peräkkäisten jäsenten erotus on vakio. Muodostetaan tämän perusteella yhtälö ja ratkaistaan  $x$ .

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2$$

$$(x^2 - 8) - x = (4x - 16) - (x^2 - 8) \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = \frac{5}{2}$$

Kun  $x = 0$ , jonon kolme ensimmäistä jäsentä ovat

$$a_1 = x = 0,$$

$$a_2 = x^2 - 8 = -8 \quad \text{ja}$$

$$a_3 = 4x - 16 = -16.$$

Tällöin erotusluku  $d = -8 - 0 = -8$ , joten neljäs jäsen on

$$a_4 = -16 - 8 = -24.$$

Kun  $x = \frac{5}{2}$ , jonon kolme ensimmäistä jäsentä ovat

$$a_1 = x = \frac{5}{2},$$

$$a_2 = x^2 - 8 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 8 = -\frac{7}{4} \quad \text{ja}$$

$$a_3 = 4x - 16 = 4 \cdot \frac{5}{2} - 16 = -6.$$

Tällöin erotusluku  $d = -\frac{7}{4} - \frac{5}{2} = -\frac{17}{4}$ , joten neljäs jäsen on

$$a_4 = -6 - \frac{17}{4} = -\frac{41}{4}.$$

### Vastaus

Kun  $x = 0$ , jonon neljä ensimmäistä jäsentä ovat  $0$ ,  $-8$ ,  $-16$  ja  $-24$ .

Kun  $x = \frac{5}{2}$ , jonon neljä ensimmäistä jäsentä ovat  $\frac{5}{2}$ ,  $-\frac{7}{4}$ ,  $-6$  ja  $-\frac{41}{4}$ .

## 4.17

Aritmeettisen summan ensimmäinen yhteenlaskettava on 142 ja viimeinen yhteenlaskettava on 1405.

Summan arvo on 326 417.

Merkitään yhteenlaskettavien lukumäärää kirjaimella  $n$ .

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan yhteenlaskettavien lukumäärä.

$$S_n = 326\,417$$

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

$$n \cdot \frac{142 + 1405}{2} = 326\,417$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$n = 422$$

Summassa on 422 yhteenlaskettavaa.

**Vastaus**

422

## 4.18

- a) Muodostetaan kolmannen jäsenen ja kuudennen jäsenen perusteella kaksi yhtälö, joissa muuttujina ovat  $a_1$  ja  $d$ . Ratkaistaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} a_3 = 72 & a_3 = a_1 + 2d \\ a_6 = -57 & a_6 = a_1 + 5d \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + 2d = 72 \\ a_1 + 5d = -57 \end{cases}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$a_1 = 158 \text{ ja } d = -43$$

- b) Muodostetaan kolmen ensimmäisen jäsenen ja kuuden ensimmäisen jäsenen summien perusteella kaksi yhtälöä, joissa muuttujina ovat  $a_1$  ja  $d$ . Ratkaistaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} S_3 = 96 & S_3 = 3 \cdot \frac{a_1 + a_3}{2} = 3 \cdot \frac{a_1 + (a_1 + 2d)}{2} \\ S_6 = 96 + 159 & S_6 = 6 \cdot \frac{a_1 + a_6}{2} = 6 \cdot \frac{a_1 + (a_1 + 5d)}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 \cdot \frac{a_1 + (a_1 + 2d)}{2} = 96 \\ 6 \cdot \frac{a_1 + (a_1 + 5d)}{2} = 255 \end{cases}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$a_1 = 25 \text{ ja } d = 7$$

### Vastaus

a)  $a_1 = 158$ ,  $d = -43$

b)  $a_1 = 25$ ,  $d = 7$



## 4.19

Lasketaan aritmeettinen summa  $101 + 102 + \dots + 999$  ja poistettavista luvuista muodostuva summa. Kysytty summa saadaan näiden erotuksena.

Aritmeettisen summan  $101 + 102 + \dots + 999$  ensimmäinen yhteenlaskettava on 101, viimeinen yhteenlaskettava on 999 ja yhteenlaskettavien lukumäärä  $n = 999 - 100 = 899$ .

Lasketaan summan arvo.

$$S_{899} = 899 \cdot \frac{101 + 999}{2} = 494\,450$$

Summan ensimmäinen kolmella jaollinen termi on 102 ( $102 : 3 = 34$ ) ja viimeinen kolmella jaollinen termi on 999 ( $999 : 3 = 333$ ). Kolmella jaolliset luvut muodostavat aritmeettisen summan  $102 + 105 + \dots + 999$ , jossa erotusluku  $d = 3$ .

Jonon 102, 105, ..., 999 yleisen jäsenen lauseke on  $a_n = 102 + (n - 1) \cdot 3 = 102 + 3n - 3 = 3n + 99$ .

Ratkaistaan, kuinka mones jäsen luku 999 on.

$$a_n = 999$$

$$3n + 99 = 999$$

$$n = 300$$

[Ratkaistaan CAS-laskimella.](#)

Aritmeettisen summan  $102 + 105 + \dots + 999$  ensimmäinen yhteenlaskettava on 102, viimeinen yhteenlaskettava on 999 ja yhteenlaskettavien lukumäärä  $n = 300$ .

Lasketaan summan arvo.

$$S_{300} = 300 \cdot \frac{102 + 999}{2} = 165\,150$$

Lasketaan kysytyn summan arvo.

$$S = 494\,450 - 165\,150 = 329\,300$$

**Vastaus**

329 300

## 4.20

- a) Jono  $(3^{a_n})$  on aritmeettinen, joten sen peräkkäisten jäsenten erotus on vakio. Jonon kaksi ensimmäistä jäsentä ovat  $3^1 = 3$  ja  $3^2 = 9$ . Jonon erotusluku on siis  $d = 9 - 3 = 6$ .

Jonon  $(3^{a_n})$  viisi ensimmäistä jäsentä ovat siis

3, 9, 15, 21 ja 27.

Kirjoitetaan nämä luvun 3 potensseina, jolloin nähdään lukujonon  $(a_n)$  viisi ensimmäistä jäsentä.

$$3 = 3^1$$

$$9 = 3^2$$

$$15 = 3^{\log_3 15} \quad x = a^{\log_a x}$$

$$21 = 3^{\log_3 21}$$

$$27 = 3^3$$

Lukujonon  $(a_n)$  viisi ensimmäistä jäsentä ovat siis

1, 2,  $\log_3 15$ ,  $\log_3 21$  ja 3.

- b)** Jonon  $(a_n)$  jäsen on suurempi kuin 10, kun jonon  $(3^{a_n})$  jäsen on suurempi kuin  $3^{10}$ .

Jonon  $(3^{a_n})$  yleisen jäsenen lauseke on

$$\begin{aligned} 3 + (n-1) \cdot 6 & \quad u_n = u_1 + (n-1)d \\ = 3 + 6n - 6 \\ = 6n - 3. \end{aligned}$$

Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan  $n$ .

$$\begin{aligned} 6n - 3 &> 3^{10} & \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\ n &> 9842 \end{aligned}$$

Pienin positiivinen kokonaisluku  $n$ , joka toteuttaa epäyhtälön, on 9843. Siis lukujonon  $(a_n)$  9843. jäsen on ensimmäinen jäsen, jonka arvo on suurempi kuin 10.

### Vastaus

**a)** 1, 2,  $\log_3 15$ ,  $\log_3 21$  ja 3

**b)** 9843. jäsen

## 4.21

Oletetaan, että jono  $a_1, a_2, a_3, \dots$  on aritmeettinen.

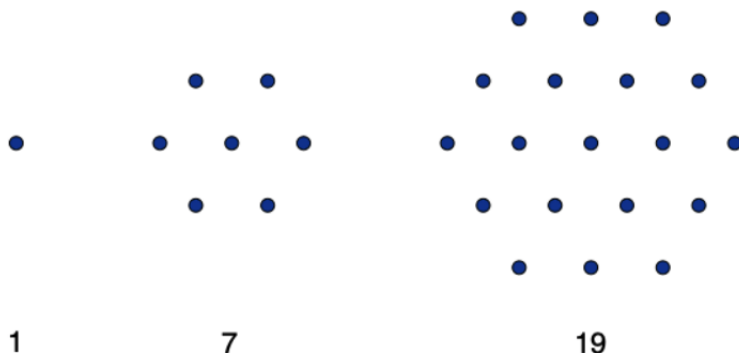
Tarkastellaan jonon kolmea peräkkäistä mielivaltaista jäsentä  $a_{n-1}, a_n$  ja  $a_{n+1}$ , missä  $n = 2, 3, \dots$ .

Oletuksen perusteella peräkkäisten jäsenten erotus on vakio. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan jäsen  $a_n$ .

$$\begin{array}{rcl} a_n - a_{n-1} & = & a_{n+1} - a_n \quad | +a_n \\ a_n + a_n - a_{n-1} & = & a_{n+1} \quad | +a_{n-1} \\ 2a_n & = & a_{n-1} + a_{n+1} \quad | : 2 \\ a_n & = & \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \end{array}$$

On osoitettu, että jäsen  $a_n$  on edellisen jäsenen  $a_{n-1}$  ja seuraavan jäsenen  $a_{n+1}$  keskiarvo, kun  $n = 2, 3, \dots$ .  $\square$

## 4.22



- a) Toinen luku saadaan ensimmäisestä luvusta lisäämällä kuusikulmio, jossa on 6 pistettä. Toinen luku on siis  $1 + 6 = 7$ .

Kolmas luku saadaan toisesta lisäämällä kuusikulmio, jossa on  $2 \cdot 6 = 12$  pistettä. Kolmas luku on siis  $7 + 12 = 19$ .

Neljäs luku saadaan kolmannesta lisäämällä kuusikulmio, jossa on  $3 \cdot 6 = 18$  pistettä. Neljäs luku on siis  $19 + 18 = 37$ .

- b) Lisättävät luvut muodostavat aritmeettisen jonon

$6, 2 \cdot 6, 3 \cdot 6, \dots$  eli jonon 6, 12, 18, ....

Kolmaskymmenes kuusikulmioluku saadaan lisäämällä lukuun 1 jonon 29 ensimmäistä jäsentä.

Aritmeettisen jonon 6, 12, 18, ... ensimmäinen jäsen on 6 ja 29. jäsen on  $6 + 28 \cdot 6 = 174$ .

Näiden 29 jäsenen summa on aritmeettinen summa

$$S_{29} = 29 \cdot \frac{6+174}{2} = 2610.$$

Kolmaskymmenes kuusikulmioluku on  $1 + 2610 = 2611$ .

- c)  $n$ :s kuusikulmioluku saadaan lisäämällä  $n - 1$  ensimmäistä aritmeettisen jonon  $6, 12, 18, \dots$  jäsentä lukuun  $1$ .

Määritetään  $n$ :s kuusikulmioluku.

$$1 + S_{n-1}$$

$$= 1 + (n-1) \cdot \frac{\overset{a_1}{6} + \overbrace{(6 + (n-2) \cdot 6)}^{a_{n-1}}}{2}$$

$$= 3n^2 - 3n + 1$$

Sievennetään CAS-laskimella.

### Vastaus

a) 37

b) 2611

c)  $3n^2 - 3n + 1$

## 4.23

- a) Välille  $]0, 1[$  kuuluvat luvut ovat muotoa  $\frac{n}{613}$ ,  
missä  $n = 1, 2, 3, \dots, 612$ .

Koska nimittäjä 613 on alkuluku, kaikki luvut  $\frac{n}{613}$  ovat muodossa, jota ei voi supistaa.

Lasketaan lukujen summa.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{613} + \frac{2}{613} + \frac{3}{613} + \dots + \frac{612}{613} \\ &= \frac{1}{613} (1 + 2 + 3 + \dots + 612) \\ &= \frac{1}{613} \cdot (612 \cdot \frac{1+612}{2}) \\ &= 306 \end{aligned}$$

Erotaan yhteinen tekijä  $\frac{1}{613}$ .

Sulkeissa aritmeettinen summa.

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{n}.$$

- b) Välille  $]0, 1[$  kuuluvat luvut ovat muotoa  $\frac{n}{625}$ ,  
missä  $n = 1, 2, 3, \dots, 624$ .

Koska  $625 = 5^4$ , luvut  $\frac{n}{625}$  ovat muodossa, jota ei voi supistaa, jos osoittaja ei ole 5:llä jaollinen.

Jos osoittaja on 5:llä jaollinen, luku supistuu, jolloin sen nimittäjä ei ole enää 625.



Kysytty summa saadaan vähentämällä kaikkien muotoa  $\frac{n}{625}$  olevien lukujen summasta niiden lukujen summa, joissa osoittaja on 5:llä jaollinen.

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{625} + \frac{2}{625} + \frac{3}{625} + \dots + \frac{624}{625} - \frac{5}{625} + \frac{2 \cdot 5}{625} + \frac{3 \cdot 5}{625} + \dots + \frac{620}{625} \\
 &= \frac{1}{625} (\underbrace{1 + 2 + 3 + \dots + 624}_{\text{Aritm. summa, } n=624} - \underbrace{(5 + 2 \cdot 5 + \dots + 620)}_{\text{Aritm. summa, } n=124}) \qquad 620 = 124 \cdot 5 \\
 &= \frac{1}{625} 624 \cdot \frac{1 + 624}{2} - 124 \cdot \frac{5 + 620}{2} \\
 &= 250
 \end{aligned}$$

### Vastaus

a) 306

b) 250